

## 6 Gelijkheden - Ongelijkheden - Deelbaarheid

### 6.1 Gelijkheden

#### 6.1.1 Begrip

$3 + 2 = 5$  Deze ware uitspraak noemt men een *gelijkheid*.

Een gelijkheid bestaat uit 2 delen:

- het deel voor het gelijkheidsteken is het **linkerlid**;
- het deel na het gelijkheidsteken is het **rechterlid**.

$$\begin{array}{ccccc}
 3 + 2 & = & 5 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{linkerlid} & & \text{gelijkheidsteken} & & \text{rechterlid}
 \end{array}$$

#### 6.1.2 Eigenschappen

##### Optellen en aftrekken.

We tellen bij beide leden van de gelijkheid  $3 + 2 = 5$  eenzelfde getal op, bijvoorbeeld 6:

$$(3 + 2) + 6 = 5 + 6.$$

We bekommen een nieuwe gelijkheid. Tellen we bij beide leden 17 op, dan bekommen we ook een gelijkheid:

$$(3 + 2) + 17 = 5 + 17.$$

We trekken van beide leden 3 af:

$$(3 + 2) - 3 = 5 - 3.$$

Ook in dit geval ontstaat er een nieuwe gelijkheid.

##### **Te onthouden**

Als men bij beide leden van een gelijkheid eenzelfde getal optelt of eenzelfde getal aftrekt, bekomt men een nieuwe gelijkheid.

**Vermenigvuldigen en delen.**

We controleren of deze eigenschap ook geldt als we beide leden vermenigvuldigen met of delen door eenzelfde getal.

$$8 + 4 = 15 - 3 \quad \text{Dit is een gelijkheid.}$$

We vermenigvuldigen elk lid met 2:

$$(8 + 4) \cdot 2 = (15 - 3) \cdot 2.$$

We bekomen een nieuwe gelijkheid. Deel nu elk lid door 4:

$$(8 + 4) : 4 = (15 - 3) : 4.$$

We bekomen opnieuw een gelijkheid. Let op: dit geldt niet als je door nul deelt.

**Te onthouden**

Als men beide leden van een gelijkheid vermenigvuldigt met of deelt door eenzelfde getal, bekomt men een nieuwe gelijkheid.

**Machtsverheffen en vierkantswortel trekken.**

Deze eigenschap geldt ook bij machtsverheffing en vierkantsworteltrekking.

$$18 - 15 = 3 \quad \Rightarrow \quad (18 - 15)^2 = 3^2$$

en ook

$$16 - 7 = 5 + 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{16 - 7} = \sqrt{5 + 4}.$$

$\Rightarrow$  lees je als '*daaruit volgt*' of '*als ... dan ...*'. Men noemt deze pijl de **implicatiepijl**.

**Te onthouden**

Als men beide leden van een gelijkheid tot een macht verheft, of uit beide leden de vierkantswortel trekt, bekomt men een nieuwe gelijkheid.

**A.C.O. 1:** Vul aan, gebruik bovenvermelde eigenschappen.

(a) Als  $a + 3 = b + 2$  dan  $a + 1 = \dots$

(b) Als  $a + 8 = b - 2$  dan  $a - 2 = \dots$

(c)  $8 + a = 7 - b \Rightarrow (8 + a)^3 = \dots$

(d)  $a + 5 = b + 3 \Rightarrow 2a + 10 = \dots$

### 6.1.3 Eigenschappen van 2 of meer gelijkheden

$$5 + 7 = 12 \quad \text{en} \quad 6 = 8 - 2$$

Als we bij beide leden hetzelfde getal optellen, hebben we opnieuw een gelijkheid:

$$5 + 7 + 6 = 12 + 6.$$

Uit de 2de gelijkheid blijkt dat  $6 = 8 - 2$ . In het rechterlid van de 1ste gelijkheid vervangen we 6 door  $8 - 2$ :

$$5 + 7 + 6 = 12 + (8 - 2).$$

Op deze manier is het linkerlid van de 1ste gelijkheid opgeteld bij het linkerlid van de 2de gelijkheid, en ook het rechterlid van de 1ste gelijkheid bij het rechterlid van de 2de gelijkheid. Men zegt: deze gelijkheden zijn *lid aan lid opgeteld*.

Ook geldt dat:

$$(5 + 7) - 6 = 12 - (8 - 2)$$

$$(5 + 7) \times 6 = 12 \times (8 - 2)$$

$$(5 + 7) : 6 = 12 : (8 - 2)$$

#### **Te onthouden**

Als men 2 gegeven gelijkheden lid aan lid optelt, aftrekt, vermenigvuldigt of deelt, dan bekomt men een nieuwe gelijkheid.

**A.C.O. 2:** Gegeven:  $a^2 + b^2 = 202$  en  $a^2 - b^2 = 40$ .

- (a) Tel beide gelijkheden lid aan lid op en bereken hieruit de waarde van  $a$ .
- (b) Trek beide gelijkheden lid aan lid af en bereken hieruit de waarde van  $b$ .

### 6.1.4 Transitieve eigenschap

$$8 - 3 = 5 \quad \text{en} \quad 5 = 1 + 4 \quad \text{dan} \quad 8 - 3 = 1 + 4.$$

$$a = b \text{ en } b = c \quad \Rightarrow \quad a = c$$

#### **Te onthouden**

Als 2 getallen gelijk zijn aan eenzelfde derde getal, dan zijn deze 2 getallen ook aan elkaar gelijk.

Deze eigenschap noemt men de **transitiviteit** van de gelijkheid.

**A.C.O. 3:** Schrijf volgende gelijkheden met symbolen.

- (a) de som van  $a$  en  $b$  is gelijk aan 7
- (b) het verschil van  $c$  en  $d$  is gelijk aan 10
- (c) de som van  $e$  en  $f$  is gelijk aan het verschil van  $x$  en  $y$
- (d) het getal  $a$  is 5 meer dan  $b$
- (e) het getal  $c$  is 7 minder dan  $d$
- (f) trekt men van 20 het getal  $x$  af, dan bekomt men de som van  $m$  en  $n$
- (g) het product van  $k$  met  $l$  is 12
- (h) het quotiënt van  $a$  en  $b$  is gelijk aan 15
- (i) het product van  $c$  met  $d$  is 4 meer dan het verschil van  $x$  en  $y$
- (j) het getal  $k$  is 7 minder dan het quotiënt van  $m$  en 4

**A.C.O. 4:** Gegeven:  $a - b = c + d$ . Als  $a, b, c, d$  dezelfde waarde hebben als in het gegeven, welke onderstaande uitdrukking is dan juist?

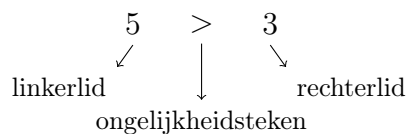
- (A)  $a - c = d - b$
- (B)  $b = c + d - a$
- (C)  $a - d = c + b$
- (D)  $c + d + a = b$

## 6.2 Ongelijkheden

### 6.2.1 Begrip

|            |                                                   |
|------------|---------------------------------------------------|
| $5 \neq 3$ | 5 is niet gelijk aan 3 of 5 is verschillend van 3 |
| $5 > 3$    | 5 is groter dan 3                                 |
| $5 \geq 3$ | 5 is groter dan of gelijk aan 3                   |
| $3 < 5$    | 3 is kleiner dan 5                                |
| $3 \leq 5$ | 3 is kleiner dan of gelijk aan 5                  |

Ook bij een ongelijkheid onderscheiden we 2 delen:



**A.C.O. 5:** Welke gehele waarden kan  $a$  aannemen in volgende ongelijkheden?

- (a)  $a < 7$
- (b)  $2 < a < 6$
- (c)  $5 \leq a$
- (d)  $a > 10$
- (e)  $7 \leq a < 9$

### 6.2.2 Eigenschappen

1) Beide leden van een ongelijkheid vermeerderen of verminderen met eenzelfde getal.

$$12 > 10$$

We tellen bij beide leden van deze ongelijkheid eenzelfde getal op, bijvoorbeeld 10:

$$12 + 10 > 10 + 10 \quad \text{of} \quad 22 > 20.$$

We trekken nu van beide leden eenzelfde getal af:

$$12 - 6 > 10 - 6 \quad \text{of} \quad 6 > 4.$$

Het teken ' $>$ ' blijft behouden als we bij beide leden eenzelfde getal optellen of aftrekken. We zeggen: we bekomen een nieuwe ongelijkheid *in dezelfde zin*. We controleren dit ook voor een ander ongelijkheidsteken:

$$16 < 20 \quad \text{en ook} \quad 16 + 3 < 20 + 3.$$

#### **Te onthouden**

Als men bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal optelt of eenzelfde getal aftrekt, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin.

*Gevolg**Voorbeeld 1*

$10 + 3 > 11$ . We trekken van beide leden 3 af:

$$10 > 11 - 3.$$

Merk op dat niet alleen de term  $+3$  van lid verandert, maar dat ook het bijbehorend teken wijzigt:  $+3$  in het linkerlid wordt  $-3$  in het rechterlid.

*Voorbeeld 2*

$8 - 2 < 12$ . We tellen bij beide leden 2 op:

$$8 < 12 + 2.$$

De term 2 is veranderd van lid, maar ook het teken is veranderd:  $-2$  in het linkerlid is  $+2$  in het rechterlid.

**Te onthouden**

In een ongelijkheid mogen we een term van lid veranderen, op voorwaarde dat we ook zijn teken veranderen.

**A.C.O. 6:**

$$(a) \quad a + b - 5 < 10 \Rightarrow a + b < \dots$$

$$(b) \quad a - 3 + c \leq b \Rightarrow -3 + c \leq \dots$$

$$(c) \quad a > 4 - b \Rightarrow b > \dots$$

**2) Beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met of delen door eenzelfde getal.**

$$12 > 10$$

We vermenigvuldigen beide leden met eenzelfde getal:

$$12 \cdot 2 > 10 \cdot 2 \quad \text{of} \quad 24 > 20.$$

Er ontstaat een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin. Dit geldt echter niet als we beide leden vermenigvuldigen met nul:

$$12 \cdot 0 = 10 \cdot 0.$$

We delen beide leden door 2:

$$12 : 2 > 10 : 2 \quad \text{of} \quad 6 > 5.$$

Er ontstaat opnieuw een ongelijkheid in dezelfde zin.

We vermenigvuldigen nu beide leden met een *strikt negatief* getal, bijvoorbeeld  $-2$ :

$$12 \cdot (-2) = -24 \quad \text{en} \quad 10 \cdot (-2) = -20.$$

Vergelijk:  $-24 < -20$ , terwijl  $12 > 10$ . Het ongelijkheidsteken is dus **omgedraaid**: we bekomen een nieuwe ongelijkheid in de *tegengestelde* zin.

**Opgelet.** Delen door 0 is onmogelijk (of zinledig).

#### **Te onthouden**

Als men beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigt met of deelt door eenzelfde *strikt positief* getal, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin. Vermenigvuldigt of deelt men met eenzelfde *strikt negatief* getal, dan bekomt men een nieuwe ongelijkheid in de *tegengestelde* zin: het ongelijkheidsteken draait om.

### **3) Van beide leden van een ongelijkheid het kwadraat of de vierkantswortel bepalen.**

$$12 > 10$$

We verheffen beide leden tot de 2de macht:

$$12^2 > 10^2 \quad \text{of} \quad 144 > 100.$$

$$9 < 16$$

We trekken van beide leden de vierkantswortel:

$$\sqrt{9} < \sqrt{16} \quad \text{of} \quad 3 < 4.$$

Dit mag enkel als beide leden *niet-negatief* zijn: de vierkantswortel van een negatief getal bestaat niet, en bij het kwadrateren van twee negatieve getallen draait de ongelijkheid net om. Bijvoorbeeld:

$$-10 > -12 \quad \text{maar} \quad (-10)^2 = 100 < 144 = (-12)^2.$$

**Te onthouden**

Als men beide leden van een ongelijkheid, die *niet-negatief* zijn, tot een macht verheft, of uit beide leden de vierkantswortel trekt, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin.

**A.C.O. 7:** Vul aan en noteer welke gehele waarden  $a$  kan aannemen in volgende gevallen.

(a)  $4a < 20 \Rightarrow a < \dots$

(b)  $a^2 \geq 25 \Rightarrow a \dots$

**4) Eigenschappen van 2 of meer ongelijkheden.**

Indien men 2 ongelijkheden heeft in dezelfde zin,

$$5 > 4 \quad \text{en} \quad 9 > 6,$$

dan bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin als men beide ongelijkheden lid aan lid optelt,

$$5 + 9 > 4 + 6 \quad \text{of} \quad 14 > 10,$$

of lid aan lid vermenigvuldigt:

$$5 \cdot 9 > 4 \cdot 6 \quad \text{of} \quad 45 > 24.$$

Deze eigenschap geldt echter niet voor aftrekken en delen. We illustreren dit door middel van enkele voorbeelden.

$$8 > 4 \text{ en } 5 > 3 \quad 8 > 7 \text{ en } 5 > 3 \quad 8 > 7 \text{ en } 5 > 4$$

$$8 - 5 > 4 - 3 \quad 8 - 5 < 7 - 3 \quad 8 - 5 = 7 - 4$$

$$3 > 1 \quad 3 < 4 \quad 3 = 3$$

$$8 > 4 \text{ en } 4 > 2 \quad 8 > 6 \text{ en } 4 > 2 \quad 8 > 3 \text{ en } 2 > 1$$

$$8 : 4 = 4 : 2 \quad 8 : 4 < 6 : 2 \quad 8 : 2 > 3 : 1$$

$$2 = 2 \quad 2 < 3 \quad 4 > 2$$

Indien men 2 ongelijkheden in dezelfde zin lid aan lid aftrekt of deelt, bekomt men een ongelijkheid in dezelfde zin, in tegengestelde zin, of zelfs een gelijkheid.

**Te onthouden**

Indien men 2 ongelijkheden in dezelfde zin lid aan lid optelt of vermenigvuldigt, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin.

**5) Transitieve eigenschap.**

$$5 > 3 \text{ en } 3 > 1 \text{ dan } 5 > 1$$

$$10 < 15 \text{ en } 15 < 20 \text{ dan } 10 < 20$$

**Te onthouden**

$$a > b \text{ en } b > c \Rightarrow a > c$$

$$a < b \text{ en } b < c \Rightarrow a < c$$

**6) Aftrekken van ongelijkheden in tegengestelde zin.**

$$8 > 5 \quad \text{en} \quad 2 < 3$$

We trekken deze ongelijkheden lid aan lid af:

$$8 - 2 > 5 - 3 \quad \text{of} \quad 6 > 2.$$

We bekomen een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin als de eerste.

**Te onthouden**

$$a > b \text{ en } c < d \Rightarrow a - c > b - d$$

**Bewijs.** We plaatsen de ongelijkheden in dezelfde zin onder elkaar en tellen lid aan lid op.

$$a > b$$

$$a > b$$

$$c < d \Rightarrow + \quad d > c \quad \text{ongelijkheid in dezelfde zin}$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \quad a + d > b + c \quad \text{lid aan lid optellen} \rightarrow \text{ongelijkheid in dezelfde zin}$$

$$\Leftrightarrow \quad a - c > b - d \quad \text{verwissel } c \text{ en } d \text{ van lid}$$

**A.C.O. 8:** Gegeven:  $a + b < c + d$ . In welke uitdrukking is het ongelijkheidsteken juist?

(A)  $c + d + 3 < a + b + 3$

(B)  $(a - d)^2 > (c - b)^2$

(C)  $c - a + d - b < 0$

(D)  $2a - 2c < 2d - 2b$

## 6.3 Deelbaarheid

### 6.3.1 Begrippen

Als je een getal vermenigvuldigt met 6, dan bekom je een veelvoud van 6.

$$5 \cdot 6 = 30 \quad 8 \cdot 6 = 48$$

30 en 48 zijn *veelvouden* van 6, of: 6 is een *deler* van 30, of: 30 is *deelbaar* door 6.

6 is een deler van 30, dan is  $30 : 6$  een *opgaande deling*, of m.a.w. de rest van de deling is 0.

### 6.3.2 Kenmerken van deelbaarheid

Voor sommige getallen kan je op een eenvoudige wijze controleren of ze een deler zijn van een bepaald getal. Dit noemen we de **kenmerken van deelbaarheid**.

#### 1) Deelbaarheid door 2, 5, 10.

Een getal is deelbaar door 2, 5 of 10 als het laatste cijfer van het getal deelbaar is door respectievelijk 2, 5 of 10.

- Een getal is deelbaar door 2 als het eindigt op 0, 2, 4, 6 of 8. Voorbeelden: 128, 6 280, 15 824 zijn deelbaar door 2.
- Een getal is deelbaar door 5 als het getal eindigt op 0 of 5. Voorbeelden: 125, 125 840, 220 zijn deelbaar door 5.
- Een getal is deelbaar door 10 als het eindigt op 0.

**2) Deelbaarheid door 4, 25 en 100.**

Een getal is deelbaar door 4, 25 of 100 als de laatste 2 cijfers deelbaar zijn door respectievelijk 4, 25 of 100.

- Een getal is deelbaar door 100 als de laatste 2 cijfers nullen zijn. Voorbeelden: 1 000, 22 500, 800 zijn deelbaar door 100.
- Een getal is deelbaar door 4 als het getal gevormd door de laatste 2 cijfers deelbaar is door 4. Voorbeeld: 1 248 is deelbaar door 4 want 48 is deelbaar door 4.
- Een getal is deelbaar door 25 als het eindigt op 00, 25, 50 of 75. Voorbeelden: 175, 3 825, 2 050 zijn veelvouden van 25.

**3) Deelbaarheid door 3 en 9.**

- Een getal is deelbaar door 3 als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 3. Voorbeeld: 92 871 is deelbaar door 3 want  $9 + 2 + 8 + 7 + 1 = 27$  en 27 is een veelvoud van 3.
- Een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers deelbaar is door 9. Voorbeeld: 1 233 is deelbaar door 9 want  $1 + 2 + 3 + 3 = 9$  en 9 is deelbaar door 9.

**4) Deelbaarheid door 8, 125 en 1 000.**

- Een getal is deelbaar door 8 als het getal gevormd door de laatste 3 cijfers deelbaar is door 8. Voorbeeld: 1 216 is deelbaar door 8, want 216 is deelbaar door 8.
- Een getal is deelbaar door 125 als de laatste 3 cijfers 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750 of 875 zijn. Voorbeeld: 1 250, 11 625, 9 875 zijn deelbaar door 125.
- Een getal is deelbaar door 1 000 als het eindigt op 000. Voorbeeld: 8 000, 165 000 zijn deelbaar door 1 000.

**5) Deelbaarheid door 11.**

Een getal is deelbaar door 11 als het verschil van de som van de cijfers van de oneven rangen en de som van de cijfers van de even rangen deelbaar is door 11.

*Voorbeeld 1*

4928. We nummeren de rangen van rechts naar links (4de, 3de, 2de, 1ste).

Som van de cijfers van oneven rang:  $8 + 9 = 17$ .

Som van de cijfers van even rang:  $2 + 4 = 6$ .

Vershil:  $17 - 6 = 11$ . 11 is een veelvoud van 11, dus 4928 is een veelvoud van 11.

*Voorbeeld 2*

181 929.

Som van de cijfers van oneven rang:  $9 + 9 + 8 = 26$ .

Som van de cijfers van even rang:  $2 + 1 + 1 = 4$ .

Vershil:  $26 - 4 = 22$ . 181 929 is deelbaar door 11 want 22 is deelbaar door 11.

*Voorbeeld 3*

9 152.

Som van de cijfers van oneven rang:  $2 + 1 = 3$ .

Som van de cijfers van even rang:  $5 + 9 = 14$ .

Vershil:  $3 - 14 = ?$  Indien de aftrekker groter is dan het aftrektal, vermeerderen we het aftrektal met 11:  $14 - 14 = 0$ .

9 152 is deelbaar door 11, want  $0 : 11 = 0$ .

**A.C.O. 9:** 6 470, 2 854, 9 185, 276, 1 404, 82 100.

Onderzoek welke bovenstaande getallen deelbaar zijn:

(a) door 2

(d) door 8

(g) door 100

(b) door 3

(e) door 9

(h) door 11

(c) door 4

(f) door 10

(i) door 125

**A.C.O. 10:** Controleer of volgende getallen 11-vouden zijn. Vervang in de getallen die geen 11-voud zijn, de nullen door een beduidend cijfer, zodat er een 11-voud ontstaat.

8 059, 232 034, 28 130, 11 079

**A.C.O. 11:** Vervang  $\square$  door een cijfer zodat het bekomen getal deelbaar is door het vermelde getal.

- (a)  $87\square$  deelbaar door 4
- (b)  $12\square6$  deelbaar door 9
- (c)  $84\square$  deelbaar door 5
- (d)  $15\square25$  deelbaar door 125
- (e)  $234\square$  deelbaar door 2 maar niet door 4

Geef telkens alle mogelijke oplossingen.

## 6.4 Grootste gemene deler en kleinste gemeen veelvoud

### 6.4.1 Begrippen

De delers van 17 zijn 1 en 17.

De delers van 23 zijn 1 en 23.

De delers van 28 zijn 1, 2, 4, 7, 14, 28.

De delers van 12 zijn 1, 2, 3, 4, 6, 12.

17 en 23 hebben juist 2 delers. Deze getallen zijn **priemgetallen**.

#### **Te onthouden**

Een priemgetal is een getal met juist 2 delers.

12 en 28 hebben verscheidene delers; dit zijn **deelbare getallen**. 1 is geen priemgetal en ook geen deelbaar getal.

### 6.4.2 Ontbinden in priemfactoren

Een getal dat geen priemgetal is, kan geschreven worden als een product waarvan elke factor een priemgetal is. Dit noemen we een getal *ontbinden in priemfactoren*.

*Voorbeelden*

$$48 = 2 \cdot 24$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 12$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= 2^4 \cdot 3$$

$$108 = 2 \cdot 54$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 27$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 2^2 \cdot 3^3$$

$$35 = 5 \cdot 7$$

Om een getal te ontbinden in priemfactoren gebruiken we volgende praktische schikking.

|     |   |                       |
|-----|---|-----------------------|
| 108 | 2 | $108 = 2^2 \cdot 3^3$ |
| 54  | 2 |                       |
| 27  | 3 |                       |
| 9   | 3 |                       |
| 3   | 3 |                       |
| 1   |   |                       |

Trek naast het getal een verticale lijn. Onderzoek of het getal deelbaar is door het kleinste priemgetal, nl. 2. Als dit zo is, dan schrijf je 2 rechts van de lijn en het quotiënt ( $108 : 2$ ) onder het eerste getal. Deel het bekomen getal ook door 2. Indien dit niet kan, controleer dan of het deelbaar is door 3. Je deelt steeds door het kleinst mogelijke priemgetal, tot het quotiënt 1 is. De getallen rechts van de lijn zijn alle priemfactoren.

|    |   |                    |
|----|---|--------------------|
| 48 | 2 | $48 = 2^4 \cdot 3$ |
| 24 | 2 |                    |
| 12 | 2 |                    |
| 6  | 2 |                    |
| 3  | 3 |                    |
| 1  |   |                    |

**A.C.O. 12:** Ontbind in priemfactoren, gebruik de praktische schikking.

(a) 90

(b) 288

(c) 2365

**A.C.O. 13:** 80 wordt ontbonden als:

(A)  $2^2 \cdot 4 \cdot 5$

(B)  $2^4 \cdot 5$

(C)  $2 \cdot 4 \cdot 5$

(D)  $1 \cdot 2^3 \cdot 5$

### 6.4.3 Kleinste gemeen veelvoud

De gemeenschappelijke veelvouden van 12 en 8 zijn 0, 24, 48, 72, ... Met het **kleinste gemeen veelvoud** (k.g.v.) bedoelt men het kleinste gemeenschappelijk veelvoud, verschillend van 0.

$$\text{kgv}(12, 8) = 24$$

*Praktische werkwijze*

*Voorbeeld 1*

$$\text{kgv}(24, 60) = ?$$

- ontbind beide getallen in priemfactoren
- bereken het product van *alle* priemfactoren, elk met hun *grootste* exponent

|                    |   |  |                            |   |
|--------------------|---|--|----------------------------|---|
| 24                 | 2 |  | 60                         | 2 |
| 12                 | 2 |  | 30                         | 2 |
| 6                  | 2 |  | 15                         | 3 |
| 3                  | 3 |  | 5                          | 5 |
| 1                  |   |  | 1                          |   |
| $24 = 2^3 \cdot 3$ |   |  | $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ |   |

$$\text{kgv}(24, 60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

↓

De grootste exponent van 2 is 3.

*Voorbeeld 2*

$\text{kgv}(130, 195, 225) = ?$

|                                                                      |                                                                      |                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r l} 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ | $\begin{array}{r l} 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ | $\begin{array}{r l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ |
| $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$                                           | $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$                                           | $225 = 3^2 \cdot 5^2$                                                        |

$$\text{kgv}(130, 195, 225) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 = 5\,850$$

#### 6.4.4 Grootste gemene deler

De gemeenschappelijke delers van 12 en 8 zijn 1, 2 en 4. De **grootste gemene (of gemeenschappelijke) deler** (g.g.d.) is 4.

Om de grootste gemene deler te bepalen van 2 niet te grote getallen, som je van elk getal de delers op. Om de g.g.d. te bepalen van grotere getallen gebruik je volgende werkwijze:

*Voorbeeld 3*

$\text{ggd}(24, 60) = ?$

- ontbind in priemfactoren
- maak het product van de *gemeenschappelijke* priemfactoren, elk met de *kleinste* exponent

|                                                                            |                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ | $\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ |
| $24 = 2^3 \cdot 3$                                                         | $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$                                                  |

$$\text{ggd}(24, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad (5 \text{ is niet gemeenschappelijk})$$

*Voorbeeld 4*

$\text{ggd}(130, 195, 225) = ?$  (voor de ontbinding, zie k.g.v.)

$$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \quad 195 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \quad 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$\text{ggd}(130, 195, 225) = 5$$

*Voorbeeld 5*

$\text{ggd}(26, 35) = ?$

$$26 = 2 \cdot 13 \quad 35 = 5 \cdot 7$$

$$\text{ggd}(26, 35) = 1$$

Als de grootste gemene deler van enkele getallen gelijk is aan 1, dan zijn deze getallen **onderling ondeelbaar**.

**A.C.O. 14:** Kruis het juiste antwoord aan: 9 is een gemene deler van:

- (A) 9 en 39
- (B) 49 en 99
- (C) 54 en 84
- (D) 27 en 63

**A.C.O. 15:** Zoek alle getallen kleiner dan 10, die onderling ondeelbaar zijn met 8.

**A.C.O. 16:** Bereken de g.g.d. en k.g.v. van:

- (a) 112 en 84
- (b) 432, 648 en 792

## Samenvatting

Als men bij beide leden van een gelijkheid eenzelfde getal optelt, aftrekt of beide leden vermenigvuldigt met of deelt door eenzelfde getal, bekomt men een nieuwe gelijkheid.

Als men bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal optelt of aftrekt, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin. Vermenigvuldigt of deelt men beide leden met eenzelfde *strikt positief* getal, dan blijft de ongelijkheid in dezelfde zin; met een *strikt negatief* getal draait ze om.

Als men 2 gelijkheden lid aan lid optelt, aftrekt, vermenigvuldigt of deelt, bekomt men een nieuwe gelijkheid.

Als men 2 ongelijkheden in dezelfde zin lid aan lid optelt of vermenigvuldigt, bekomt men een nieuwe ongelijkheid in dezelfde zin.

**Transitieve eigenschap:**

$$a = b \text{ en } b = c \quad \Rightarrow \quad a = c$$

$$a < b \text{ en } b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

## Kenmerken van deelbaarheid

- door 2, 5, 10: laatste cijfer deelbaar door 2, 5, 10
- door 4, 25, 100: laatste 2 cijfers deelbaar door 4, 25, 100
- door 8, 125, 1 000: laatste 3 cijfers deelbaar door 8, 125, 1 000
- door 3, 9: som der cijfers deelbaar door 3 of 9
- door 11: som van de cijfers van oneven rang min som van de cijfers van even rang deelbaar door 11

## Oplossingen A.C.O.

### A.C.O. 1:

(a)  $a + 1 = b$

(b)  $a - 2 = b - 12$

(c)  $(8 + a)^3 = (7 - b)^3$

(d)  $2a + 10 = 2b + 6$

### A.C.O. 2:

(a)

$$a^2 + b^2 + a^2 - b^2 = 202 + 40$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 242$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 121$$

$$\Leftrightarrow a = 11$$

(b)

$$a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) = 202 - 40$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - a^2 + b^2 = 162$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = 162$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow b = 9$$

### A.C.O. 3:

(a)  $a + b = 7$

(b)  $c - d = 10$

(c)  $e + f = x - y$

(d)  $a - 5 = b$  of  $a = b + 5$

(e)  $c + 7 = d$  of  $c = d - 7$

(f)  $20 - x = m + n$

(g)  $k \cdot l = 12$

(h)  $a : b = 15$

(i)  $c \cdot d - 4 = x - y$  of  $c \cdot d = x - y + 4$

(j)  $k + 7 = m : 4$  of  $k = m : 4 - 7$

**A.C.O. 4:****Antwoord (C)** is juist.**A.C.O. 5:**

(a)  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(b)  $3, 4, 5$

(c)  $5, 6, 7, \dots$

(d)  $11, 12, 13, \dots$

(e)  $7, 8$

**A.C.O. 6:**

(a)  $a + b < 15$

(b)  $-3 + c \leq b - a$

(c)  $b > 4 - a$

**A.C.O. 7:**

(a)  $a < 5$ :  $a$  kan zijn  $0, 1, 2, 3, 4$

(b)  $a \geq 5$ :  $5, 6, 7, \dots$

**A.C.O. 8:****Antwoord (D)**:  $b$  en  $c$  verwisselen van lid; daarna worden beide leden  $\times 2$ .

**A.C.O. 9:**

- (a) door 2: 6 470, 2 854, 276, 1 404, 82 100
- (b) door 3: 276, 1 404
- (c) door 4: 276, 1 404, 82 100
- (d) door 8: geen
- (e) door 9: 1 404
- (f) door 10: 6 470, 82 100
- (g) door 100: 82 100
- (h) door 11: 9 185
- (i) door 125: geen

**A.C.O. 10:**

- 8 059: som oneven rangen – som even rangen =  $(9 + 11) - 13 = 7$ . 7 is geen elfvoud, dus 8 059 ook niet. Wel elfvoud: 8 459.
- 232 034: verschil  $7 - 7 = 0$ , is een elfvoud.
- 28 130: verschil  $(3 + 11) - 11 = 3$ , geen elfvoud. Wel elfvoud: 28 138.
- 11 079: verschil  $10 - 8 = 2$ , geen elfvoud. 11 979 wel elfvoud, want  $19 - 8 = 11$ .

**A.C.O. 11:**

- (a) 872 of 876
- (b) 1 206 of 1 296
- (c) 845 of 840
- (d) 15 125 of 15 625
- (e) 2 342 of 2 346

**A.C.O. 12:**

$$\begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 (a) \quad 15 & 3 \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 288 & 2 \\
 144 & 2 \\
 72 & 2 \\
 (b) \quad 36 & 2 \quad 288 = 2^5 \cdot 3^2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2365 & 5 \\
 473 & 11 \\
 (c) \quad 43 & 43 \quad 2365 = 5 \cdot 11 \cdot 43 \\
 1 & 
 \end{array}$$

**A.C.O. 13:**

**Antwoord (B)** is juist.

**A.C.O. 14:**

**Antwoord (D)** is juist.

**A.C.O. 15:**

Onderling ondeelbaar met 8 zijn: 1 en 8; 3 en 8; 5 en 8; 7 en 8; 9 en 8.

**A.C.O. 16:**

|     |   |    |   |
|-----|---|----|---|
| 112 | 2 |    |   |
| 56  | 2 | 84 | 2 |
| 28  | 2 | 42 | 2 |
| 14  | 2 | 21 | 3 |
| 7   | 7 | 7  | 7 |
| 1   |   | 1  |   |

(a)  $112 = 2^4 \cdot 7$        $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$   
 $\text{ggd}(112, 84) = 2^2 \cdot 7 = 28$        $\text{kgv}(112, 84) = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336$

|     |   |     |   |     |    |
|-----|---|-----|---|-----|----|
| 432 | 2 | 648 | 2 |     |    |
| 216 | 2 | 324 | 2 | 792 | 2  |
| 108 | 2 | 162 | 2 | 396 | 2  |
| 54  | 2 | 81  | 3 | 198 | 2  |
| 27  | 3 | 27  | 3 | 99  | 3  |
| 9   | 3 | 9   | 3 | 33  | 3  |
| 3   | 3 | 3   | 3 | 11  | 11 |
| 1   |   | 1   |   | 1   |    |

(b)  $432 = 2^4 \cdot 3^3$        $648 = 2^3 \cdot 3^4$        $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$   
 $\text{ggd}(432, 648, 792) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$        $\text{kgv}(432, 648, 792) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 11 = 14\,256$