

7 Breuken

7.1 Begrippen

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 5 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{teller}} \\ \xrightarrow{\text{noemer}} \end{array}$$

Teller en noemer noemen we de **termen** van de breuk.

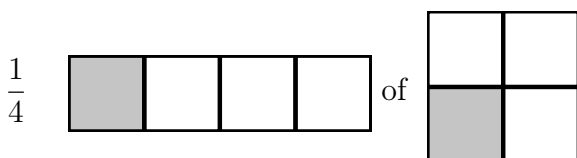
7.1.1 Wat is een breuk?

We kunnen een breuk beschouwen als een aantal gelijke delen van een geheel. De noemer duidt aan in hoeveel gelijke delen een geheel verdeeld is. De teller zegt hoeveel gelijke delen er genomen worden.

Voorbeeld 1



Voorbeeld 2



Voorbeeld 3



Een breuk kunnen we ook beschouwen als een andere schrijfwijze van een deling. Als we $5 : 2$ uitrekenen bekommen we het geheel getal 2 met rest 1 of een decimaal getal 2.5. In plaats van met decimalen te rekenen, kunnen we het resultaat ook schrijven in breukvorm.

$$5 : 2 = \frac{5}{2}$$

Voorbeeld 4

$$\frac{4}{7} = 4 : 7$$

Opmerkingen

- Schrijf de breukstreep steeds horizontaal.
- De noemer van een breuk mag niet nul zijn, vermits delen door 0 een zinledige bewerking is.

7.1.2 Soorten breuken

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{8}$ zijn stambreuken.

Een **stambreuk** is een breuk waarvan de teller gelijk is aan 1.

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ en $\frac{7}{9}$ zijn echte breuken.

Bij een **echte breuk** is de teller kleiner dan de noemer.

$\frac{8}{3}$, $\frac{12}{5}$ en $\frac{21}{11}$ zijn onechte breuken.

Bij een **onechte breuk** is de teller groter dan de noemer.

$3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$ en $8\frac{4}{9}$ zijn gemengde getallen.

Een **gemengd getal** is een geheel getal en een echte breuk.

$\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ en $\frac{8}{7}$ zijn gelijknamige breuken.

De breuken hebben een gelijke noemer.

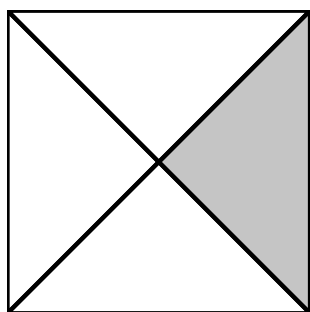
$\frac{5}{3}$ en $\frac{3}{5}$ zijn elkaars **omgekeerde**.

Elk geheel getal kan geschreven worden als een breuk met noemer 1:

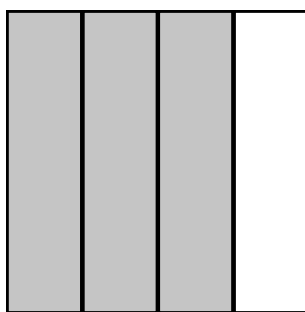
Bijvoorbeeld $8 = \frac{8}{1}$ en $20 = \frac{20}{1}$ of $20 = 20 : 1$

A.C.O. 1: Druk het gekleurde gedeelte van het vierkant uit als een breuk.

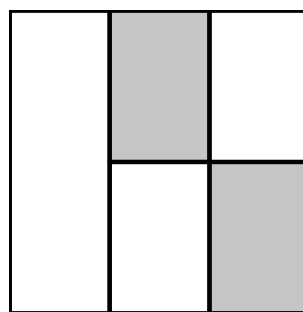
(a)



(b)



(c)



A.C.O. 2: Een zak snoepjes wordt verdeeld onder 3 kinderen. Evy krijgt 8 snoepjes, Tineke krijgt er 2 minder en Nele krijgt er 3. Druk uit door middel van een breuk hoeveel snoepjes uit de zak elk kind krijgt.

7.2 Hoofdeigenschap van breuken

We duiden van een rechthoek achtereenvolgens $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ aan.



Het aangeduide deel is telkens even groot.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

Dit kunnen we algebraïsch afleiden:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}.$$

Te onthouden

De waarde van een breuk verandert niet als we teller en noemer van die breuk vermenigvuldigen met of delen door eenzelfde van nul verschillend getal.

A.C.O. 3: Vul de ontbrekende tellers en noemers in, zodat alle breuken gelijk zijn.

(a) $\frac{3}{13} = \frac{\quad}{78} = \frac{6}{\quad} = \frac{90}{\quad}$

(b) $\frac{27}{\quad} = \frac{\quad}{24} = \frac{9}{4} = \frac{45}{\quad}$

A.C.O. 4: Bepaal telkens de waarde van a .

(a) $\frac{25}{55} = \frac{5}{a}$

(b) $\frac{a}{12} = \frac{13}{6}$

7.3 Vereenvoudigen van breuken

Om een breuk te vereenvoudigen, deel je teller en noemer door eenzelfde getal. Een breuk waarvan teller en noemer geen gemeenschappelijke deler hebben, is een *onvereenvoudigbare breuk*.

Als we bewerkingen uitvoeren met breuken, herleiden we de breuken altijd tot hun eenvoudigste vorm. Hiervoor bepalen we de g.g.d. van teller en noemer.

Voorbeeld 1

Herleid tot een onvereenvoudigbare breuk:

$$\frac{24}{102} = \frac{?}{?}$$

We ontbinden teller en noemer in factoren:

24	2	102	2
12	2	51	3
6	2	17	17
3	3	1	
1			

Ontbonden in factoren hebben we dus $24 = 2^3 \cdot 3$ en $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$

Nu bepalen we de grootste gemene deler: $\text{ggd}(24, 102) = 2 \cdot 3 = 6$.

En dus $\frac{24}{102} = \frac{24 : 6}{102 : 6} = \frac{4}{17}$.

Een andere manier om een breuk te herleiden tot een onvereenvoudigbare breuk is:

- ontbind teller en noemer in priemfactoren;
- schrap de gemeenschappelijke factoren.

Voorbeeld 2

$$\frac{24}{102} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 17} = \frac{4}{17}$$

Voorbeeld 3

$$\frac{275}{495} = \frac{?}{?}$$

275	5		495	3
55	5		165	3
11	11		55	5
1			11	11
			1	
$275 = 5^2 \cdot 11$			$495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	

Eerste manier:

$$\begin{aligned} \text{ggd}(275, 495) &= 5 \cdot 11 = 55 \\ \Rightarrow \frac{275}{495} &= \frac{275 : 55}{495 : 55} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Tweede manier:

$$\frac{275}{495} = \frac{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{11}}{3 \cdot 3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{11}} = \frac{5}{9}$$

A.C.O. 5: Herleid tot een onvereenvoudigbare breuk:

(a) uit het hoofd:

- $\frac{6}{15}$
- $\frac{22}{55}$

(b) door middel van de ggd:

- $\frac{540}{756}$
- $\frac{1089}{1078}$

(c) door teller en noemer te ontbinden in priemfactoren en dan te vereenvoudigen:

- $\frac{658}{1128}$
- $\frac{11067}{15470}$

7.4 Gelijksnamig maken van breuken

Breuken met dezelfde noemer, noemt men gelijknamige breuken. Breuken gelijknamig maken betekent beide breuken herleiden naar een breuk met dezelfde noemer. We nemen deze gemeenschappelijke noemer steeds zo klein mogelijk. We zoeken dus telkens het

kleinste gemeen veelvoud van de gegeven noemers.

Voorbeeld 1

Maak $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig

$$\text{kgv}(6, 4) = 12$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

We vermenigvuldigen de noemer met 2. Om een gelijkwaardige breuk te bekomen, vermenigvuldigen we ook de teller met 2. (hoofdeigenschap van breuken)

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad \text{Teller en noemer} \times 3.$$

De gelijknamige breuken zijn $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.

Voorbeeld 2

Maak gelijknamig: $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{9}$

$$\text{kgv}(8, 9) = 72$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 9}{8 \times 9} = \frac{27}{72} \quad \text{en} \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \times 8}{9 \times 8} = \frac{40}{72}$$

De gelijknamige breuken zijn $\frac{27}{72}$ en $\frac{40}{72}$.

Voorbeeld 3

Maak gelijknamig: $\frac{12}{45}$ en $\frac{21}{75}$

Controleer eerst of je de gegeven breuk kan vereenvoudigen en maak daarna gelijknamig.

- vereenvoudig

$$\frac{12}{45} = \frac{4}{15} \quad \text{en} \quad \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$$
- maak gelijknamig

$$\text{kgv}(15, 25) = 75$$

$$\frac{4}{15} = \frac{20}{75} \quad \text{en} \quad \frac{7}{25} = \frac{21}{75}$$

A.C.O. 6: Maak volgende breuken gelijknamig:

(a) $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{8}$

(b) $\frac{60}{96}$ en $\frac{45}{66}$

(c) $\frac{4}{6}$ en $\frac{6}{8}$ en $\frac{3}{9}$

7.5 Ordenen van breuken

d.w.z. rangschikken van breuken van klein naar groot of van groot naar klein.

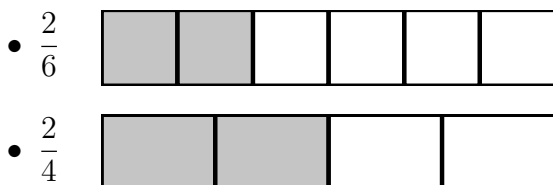
7.5.1 Gelijknamige breuken

De breuk met de kleinste teller is de kleinste breuk.

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$$

7.5.2 Breuken met gelijke teller

Bij breuken met gelijke teller is de breuk met de grootste noemer het kleinst



$$\frac{2}{6} < \frac{2}{4}$$

7.5.3 Ongelijknamige breuken

Voorbeeld 1

Welke breuk is het grootst?

$$\frac{7}{9} \text{ of } \frac{11}{15}$$

Maak de breuken eerst gelijknamig en vergelijk ze dan:

$$\frac{7}{9} = \frac{35}{45} \text{ en } \frac{11}{15} = \frac{33}{45}$$

$$\frac{35}{45} > \frac{33}{45} \text{ dus:}$$

$$\frac{7}{9} > \frac{11}{15}$$

A.C.O. 7: Rangschik van klein naar groot:

$$\frac{12}{30} \quad \frac{21}{28} \quad \frac{36}{18} \quad \frac{3}{5}$$

A.C.O. 8: Plaats het ongelijkheidsteken $<$ of $>$

(a) $\frac{1}{7}$ — $\frac{1}{8}$

(d) $\frac{7}{20}$ — $\frac{9}{25}$

(b) $\frac{35}{41}$ — $\frac{31}{41}$

(e) $\frac{3}{14}$ — $\frac{4}{21}$

(c) $\frac{5}{12}$ — $\frac{5}{9}$

(f) $\frac{5}{9}$ — $\frac{5}{7}$

Te onthouden

- Hoofdeigenschap van breuken:

De waarde van een breuk verandert niet als je teller en noemer vermenigvuldigt met, of deelt door eenzelfde van nul verschillend getal.

- Breuken vereenvoudigen:

Deel teller en noemer door hun grootste gemene deler.

- Breuken gelijknamig maken:

- Vereenvoudig, indien mogelijk, de gegeven breuken.
- De gemeenschappelijke noemer is het k.g.v. van beide noemers.

- Ordenen van breuken:

- Vereenvoudig eerst de gegeven breuken.
- Maak de breuken gelijknamig.
- Rangschik de gelijknamige breuken.
- Noteer de breuken in hun oorspronkelijke vorm, in de juiste volgorde.

Oplossingen A.C.O.

A.C.O. 1:

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{2}{6}$

A.C.O. 2:

In de zak zitten $8 + 6 + 3 = 17$ snoepjes. Het geheel bestaat uit 17 delen; dus de noemer is 17. Evy krijgt $\frac{8}{17}$, Tineke $\frac{6}{17}$ en Nele $\frac{3}{17}$.

A.C.O. 3:

(a) $\frac{3}{13} = \frac{18}{78} = \frac{6}{26} = \frac{90}{390}$

(b) $\frac{27}{12} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4} = \frac{45}{20}$

A.C.O. 4:

(a) $a = 55 : 5 = 11$

(b) $a = 13 \cdot 2 = 26$

A.C.O. 5:

(a) • $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
 • $\frac{22}{55} = \frac{2}{5}$

(b)	•	540	2		756	2
		270	2		378	2
		135	3		189	3
		45	3		63	3
		15	3		21	3
		5	5		7	7
		1			1	

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \text{ggd}(540, 756) = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

$$\Rightarrow \frac{540}{756} = \frac{540 : 108}{756 : 108} = \frac{5}{7}$$

$$\bullet \begin{array}{c|c} 1089 & 3 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$1089 = 3^2 \cdot 11^2$$

$$\Rightarrow \text{ggd}(1089, 1078) = 11$$

$$\Rightarrow \frac{1089}{1078} = \frac{99}{98}$$

(c) $\bullet \begin{array}{c|c} 658 & 2 \\ 329 & 7 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$

$$658 = 2 \cdot 7 \cdot 47$$

$$\Rightarrow \frac{658}{1128} = \frac{\cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{47}}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{47}} = \frac{7}{12}$$

$$\bullet \begin{array}{c|c} 11067 & 3 \\ 3689 & 7 \\ 527 & 17 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$$11067 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$$

$$\begin{array}{c|c} 1078 & 2 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$1078 = 2 \cdot 7^2 \cdot 11$$

$$\begin{array}{c|c} 1128 & 2 \\ 564 & 2 \\ 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

$$1128 = 2^3 \cdot 3 \cdot 47$$

$$\begin{array}{c|c} 15470 & 2 \\ 7735 & 5 \\ 1547 & 7 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$15470 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$$

$$\Rightarrow \frac{11067}{15470} = \frac{3 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{17} \cdot 31}{2 \cdot 5 \cdot \cancel{7} \cdot 13 \cdot \cancel{17}} = \frac{93}{130}$$

A.C.O. 6:

(a) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ en $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$

(b) vereenvoudig: $\frac{60}{96} = \frac{5}{8}$ en $\frac{45}{66} = \frac{15}{22}$
gemeenschappelijke noemer: 88
gelijknamig maken: $\frac{5}{8} = \frac{55}{88}$ en $\frac{15}{22} = \frac{60}{88}$

(c) vereenvoudig: $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{3}$
gemeenschappelijke noemer: 12
gelijknamig maken: $\frac{8}{12}$ en $\frac{9}{12}$ en $\frac{4}{12}$

A.C.O. 7:

$$\frac{12}{30} \quad \frac{21}{28} \quad \frac{36}{18} \quad \frac{3}{5}$$

Vereenvoudigen:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{5}$$

Gelijknamig maken:

$$\frac{8}{20} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{40}{20} \quad \frac{12}{20}$$

Ordenen:

$$\frac{8}{20} < \frac{12}{20} < \frac{15}{20} < \frac{40}{20}$$

Dus:

$$\frac{12}{30} < \frac{3}{5} < \frac{21}{28} < \frac{36}{18}$$

A.C.O. 8:

(a) $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$

(d) $\frac{7}{20} < \frac{9}{25}$

(b) $\frac{35}{41} > \frac{31}{41}$

(e) $\frac{3}{14} > \frac{4}{21}$

(c) $\frac{5}{12} < \frac{5}{9}$

(f) $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$