

15 Machtsverheffing en vierkantswortel

Herneem eerst nog eens de leerstof hierover in les 5.

15.1 Machtsverheffing

15.1.1 Begrip

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad 8^2 = 8 \cdot 8 = 64$$

De n -de macht van een getal a is het product van n factoren a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factoren}}$$

Hierbij is a het *grondtal* en n de *exponent*. Een macht kan dus geschreven worden als een gedurig product.

15.1.2 Tekenregel

$$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$$

$$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125$$

Als het grondtal positief is, is de macht positief.

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

$$(-1)^5 = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$$

Een gedurig product is negatief als het aantal mintekens oneven is.

$$(-4)^4 = (-4)(-4)(-4)(-4) = +256$$

$$(-9)^2 = (-9)(-9) = +81$$

Een gedurig product is positief als het aantal mintekens even is.

We kunnen de regel als volgt schrijven:

Te onthouden

Een macht van een positief getal is steeds positief.

Een macht van een negatief getal is:

- positief als de exponent even is;
- negatief als de exponent oneven is.

Voorbeelden

$$(-7)^3 = -343 \quad \text{grondtal negatief, exponent oneven} \rightarrow \text{min}$$

$$(+2)^5 = +32 \quad \text{grondtal positief} \rightarrow \text{plus}$$

$$(-2)^4 = +16 \quad \text{grondtal negatief, exponent even} \rightarrow \text{plus}$$

$$(+2)^2 = +4 \quad \text{grondtal positief} \rightarrow \text{plus}$$

Enkele bijzondere machten

(a) $(+6)^1 = +6$, $(-4)^1 = -4$.

Een getal tot de eerste macht is het getal zelf. De exponent 1 hoeft dus niet te schrijven.

(b) $(+8)^0 = 1$, $(-7)^0 = 1$.

Een getal tot de nulde macht is steeds 1.

(c) $0^3 = 0$, $0^8 = 0$.

Een macht van nul is steeds nul.

(d) 0^0 is zinledig (is niet gedefinieerd).

A.C.O. 1: Bereken:

(a) $(-6)^3$

(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

(k) $(-2)^6$

(b) $(-1)^{12}$

(g) $(+4)^3$

(l) $(-4)^5$

(c) $(+0.5)^3$

(h) $(+1)^9$

(m) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$

(d) $(+5)^1$

(i) $(-0.1)^6$

(n) $(-3)^7$

(e) $(+10)^4$

(j) $(-9)^0$

(o) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$

15.1.3 Eigenschappen

1. Vermenigvuldigen van 2 machten met hetzelfde grondtal

5^3 , 5^8 , 5^6 , 5^2 zijn machten met hetzelfde grondtal, of **gelijksoortige machten**.

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot 5^2 &= (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 5^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^4 \cdot 3^3 &= (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

Samengevat

$$5^3 \cdot 5^2 = 5^5 \quad 3^4 \cdot 3^3 = 3^7$$

De exponenten zijn opgeteld: $3 + 2 = 5$ en $4 + 3 = 7$.

Te onthouden

Om 2 machten met hetzelfde grondtal te vermenigvuldigen, behoud je het grondtal en tel je de exponenten op.

Voorbeelden

$$(-3)^3 \cdot (-3)^6 = (-3)^{3+6} = (-3)^9$$

$$(+4)^2 \cdot (+4)^3 = (+4)^{2+3} = (+4)^5$$

$$a^8 \cdot a^3 = a^{8+3} = a^{11}$$

$$(-b)^5 \cdot (-b)^2 = (-b)^{5+2} = (-b)^7$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. Delen van gelijksoortige machten

$$(+8)^3 : (+8)^1 = \frac{(+8)(+8)(+8)}{+8} = (+8)^2$$

Om een product te delen door een getal, deel je 1 factor door dat getal.

$$(-6)^5 : (-6)^3 = \frac{(-6)(-6)(-6)(-6)(-6)}{(-6)(-6)(-6)} = (-6)^2$$

Samengevat

$$(+8)^3 : (+8)^1 = (+8)^{3-1} = (+8)^2 \quad (-6)^5 : (-6)^3 = (-6)^2$$

Te onthouden

Om 2 machten met hetzelfde grondtal te delen, behoud je het grondtal en trek je de exponenten af.

Voorbeelden

$$(+7)^6 : (+7)^2 = (+7)^{6-2} = (+7)^4 = 2401$$

$$(-4)^8 : (-4)^5 = (-4)^{8-5} = (-4)^3 = -64$$

$$(-9)^3 : (-9) = (-9)^{3-1} = (-9)^2 = 81$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{4-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$$a^{10} : a^7 = a^{10-7} = a^3$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

3. Macht van een macht

$$\begin{aligned} (4^3)^2 &= (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 && \text{definitie van macht (binnen de haakjes)} \\ &= (4 \cdot 4 \cdot 4)(4 \cdot 4 \cdot 4) && \text{definitie van macht} \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 && \text{associativiteit (haakjes weglaten)} \\ &= 4^6 && \text{definitie van macht (in omgekeerde richting)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(-8)^2]^4 &= [(-8)(-8)]^4 \\ &= [(-8)(-8)][(-8)(-8)][(-8)(-8)][(-8)(-8)] \\ &= (-8)(-8)(-8)(-8)(-8)(-8)(-8)(-8) \\ &= (-8)^8 \end{aligned}$$

Samengevat

$$(4^3)^2 = 4^6 \quad [(-8)^2]^4 = (-8)^8$$

Te onthouden

Om een macht tot een macht te verheffen, behoud je het grondtal en vermenigvuldig je de exponenten.

Voorbeelden

$$(a^5)^7 = a^{5 \cdot 7} = a^{35}$$

$$[(-2)^3]^6 = (-2)^{3 \cdot 6} = (-2)^{18}$$

$$(p^x)^y = p^{xy}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. Macht van een product

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$$

$$= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$$

$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$$

$$= a^3 \cdot b^3$$

$$[(-3) \cdot 5]^2 = [(-3) \cdot 5] \cdot [(-3) \cdot 5]$$

$$= (-3) \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 5$$

$$= (-3)^2 \cdot 5^2$$

Samengevat

$$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3 \qquad [(-3) \cdot 5]^2 = (-3)^2 \cdot 5^2$$

Te onthouden

Om een product tot een macht te verheffen, verhef je elke factor tot die macht.

Voorbeelden

$$[4 \cdot (-7)]^6 = 4^6 \cdot (-7)^6$$

$$(-5xy)^3 = (-5)^3 x^3 y^3$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

5. Macht van een breuk

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^2}{5^2}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^5 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1^5}{4^5} = -\frac{1}{4^5}$$

Samengevat

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -\frac{1}{4^5}$$

Te onthouden

Om een breuk tot een macht te verheffen, verhef je teller en noemer tot die macht.

Deze eigenschap ken je reeds uit het hoofdstuk bewerkingen met breuken (les 8).

Overzicht van de eigenschappen

1. Product van gelijksoortige machten $\rightarrow$ exponenten optellen
2. Delen van gelijksoortige machten $\rightarrow$ exponenten aftrekken
3. Macht van een macht $\rightarrow$ exponenten vermenigvuldigen
4. Product tot een macht verheffen $\rightarrow$ elke factor tot de macht verheffen
5. Macht van een breuk $\rightarrow$ teller en noemer tot de macht verheffen

Er is geen eigenschap om gelijksoortige machten op te tellen of af te trekken. Bijvoorbeeld:

$$3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36 \quad (-2)^4 - (-2)^2 = 16 - 4 = 12.$$

A.C.O. 2: Schrijf korter met behulp van de eigenschappen:

(a) $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5$

(f) $a^7 : a$

(b) $a^3 \cdot b^2 \cdot a \cdot b^3$

(g) $(2^4)^2$

(c) $2b^2 \cdot 2b \cdot 2b^4$

(h) $0.2^{10} \cdot 0.2^{10}$

(d) $12^{10} : 12^2$

(i) $a^{100} : a$

(e) $\frac{c^4}{c^3}$

(j) $(15^0)^4$

A.C.O. 3: Bereken:

(a) $(+6x^4) \cdot (-3x^5)$

(b) $(-27x^8) : (-36x^4)$

(c) $(+3x^2y^3z^4)^3$

(d) $(-9x^4)^2$

(e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$

15.2 Vierkantswortel

15.2.1 Definitie

In de rekenkunde leerden we reeds:

Te onthouden

De vierkantswortel van een getal is elk getal, waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal.

De vierkantswortel van $+9 = +3$, want $(+3)^2 = +9$; maar ook de vierkantswortel van $+9 = -3$, want $(-3)^2 = +9$.

$$\sqrt{+36} = ?$$

$$\sqrt{+36} = +6, \text{ want } (+6)^2 = +36; \text{ en ook } \sqrt{+36} = -6, \text{ want } (-6)^2 = +36.$$

Te onthouden

Een positief getal heeft 2 tegengestelde vierkantswortels.

$\sqrt{-16} = ?$ Er bestaat geen getal waarvan het kwadraat -16 is: een kwadraat is steeds positief (de exponent is even).

Te onthouden

Een negatief getal heeft geen vierkantswortel.

De vierkantswortel trekken uit een negatief getal is een **zinledige** bewerking (is onmogelijk). Meestal wordt enkel de positieve vierkantswortel uit een positief getal bedoeld.

15.2.2 Afspraken

Om aan te duiden welke vierkantswortel bedoeld wordt, is volgende afspraak gemaakt:

$\sqrt{16} = 4$ Dit is de positieve vierkantswortel van 16.

$-\sqrt{16} = -4$ Als we de negatieve vierkantswortel van een positief getal bedoelen, dan zetten we een minteken voor het wortelteken.

Voorbeelden

$$\sqrt{+49} = +7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$-\sqrt{+64} = -8$$

$$-\sqrt{81} = -9$$

$$-\sqrt{0.36} = -0.06$$

$$\sqrt{-225} \text{ is zinledig}$$

De vierkantswortels van 100 zijn $+\sqrt{100} = 10$ en $-\sqrt{100} = -10$.

A.C.O. 4: Bereken indien mogelijk:

(a) de vierkantswortel van +169

(b) de vierkantswortel van -196

(c) $\sqrt{(-16)(-4)}$

(d) $\sqrt{-4 \cdot 16}$

15.2.3 Eigenschappen

1. Vierkantswortel van een product

$$\begin{aligned}\sqrt{16 \times 4} &= \sqrt{64} = 8 & \text{en} & \quad \sqrt{16} \times \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8 \\ \sqrt{9 \times 25} &= \sqrt{225} = 15 & \text{en} & \quad \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15\end{aligned}$$

Samengevat

$$\sqrt{16 \times 4} = \sqrt{16} \times \sqrt{4} \quad \sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25}$$

Te onthouden

De vierkantswortel van een product is gelijk aan het product van de vierkantswortels:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

2. Vierkantswortel van een even macht

$$\begin{aligned}\sqrt{3^4} &= \sqrt{81} = 9 = 3^2 \\ \sqrt{2^8} &= \sqrt{256} = 16 = 2^4\end{aligned}$$

Samengevat

$$\sqrt{3^4} = 3^2 \quad \sqrt{2^8} = 2^4$$

Te onthouden

Om de vierkantswortel te berekenen uit een even macht, behoud je het grondtal en deel je de exponent door 2:

$$\sqrt{a^{2m}} = a^{2m:2} = a^m.$$

3. Vierkantswortel van een breuk

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{4}{9}} &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{81}{121}} &= \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{121}} = \frac{9}{11}\end{aligned}$$

Te onthouden

De vierkantswortel van een breuk is gelijk aan de vierkantswortel van de teller gedeeld door de vierkantswortel van de noemer.

A.C.O. 5: Bereken, maak gebruik van de eigenschappen:

(a) $\sqrt{4 \times 36 \times 81}$

(b) $\sqrt{\frac{16}{81}}$

(c) $\frac{\sqrt{36}}{121}$

(d) $\sqrt{0.09}$

(e) $\sqrt{12^4}$

(f) $\sqrt{144 \times 9 \times 4}$

(g) $\sqrt{9^6}$

(h) $\sqrt{1.96}$

Te onthouden

Machtsverheffing

Tekenregel

Een macht van een positief getal is steeds positief. Een macht van een negatief getal is positief als de exponent even is, negatief als de exponent oneven is.

Eigenschappen

- Vermenigvuldigen van gelijksoortige machten: grondtal behouden, exponenten optellen.
- Delen van gelijksoortige machten: grondtal behouden, exponenten aftrekken.
- Macht van een macht: grondtal behouden, exponenten vermenigvuldigen.
- Macht van een product: elke factor tot de macht verheffen.
- Macht van een breuk: teller en noemer tot de macht verheffen.

Vierkantswortel

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Een positief getal a heeft 2 tegengestelde vierkantswortels, $+\sqrt{a}$ en $-\sqrt{a}$. Een negatief getal a heeft geen vierkantswortels.

Oplossingen A.C.O.

A.C.O. 1:

(a) $(-6)^3 = -216$

(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

(k) $(-2)^6 = +64$

(b) $(-1)^{12} = 1$

(g) $(+4)^3 = 64$

(l) $(-4)^5 = -1024$

(c) $(+0.5)^3 = +0.125$

(h) $(+1)^9 = +1$

(m) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

(d) $(+5)^1 = +5$

(i) $(-0.1)^6 = 0.000001$

(n) $(-3)^7 = -2187$

(e) $(+10)^4 = 10\,000$

(j) $(-9)^0 = 1$

(o) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

A.C.O. 2:

(a) $5^{4+3+1} = 5^8$

(f) $a^{7-1} = a^6$

(b) $a^{3+1} \cdot b^{2+3} = a^4 \cdot b^5$

(g) $2^{4 \cdot 2} = 2^8$

(c) $2^3 \cdot b^{2+1+4} = 8 \cdot b^7$

(h) $0.2^{10+10} = 0.2^{20}$

(d) $12^{10-2} = 12^8$

(i) $a^{100-1} = a^{99}$

(e) $c^{4-3} = c^1 = c$

(j) $(15^0)^4 = 15^{0 \cdot 4} = 15^0 = 1$

A.C.O. 3:

(a) $(+6x^4) \cdot (-3x^5) = -18x^{4+5} = -18x^9$

(b) $(-27x^8) : (-36x^4) = \frac{27}{36}x^{8-4} = \frac{3}{4}x^4$

(c) $(+3x^2y^3z^4)^3 = 27x^6y^9z^{12}$

(d) $(-9x^4)^2 = 81x^8$

(e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{64}{125}$

A.C.O. 4:

(a) $-\sqrt{169} = -13$ en $\sqrt{169} = +13$

(b) $\sqrt{-196}$: geen oplossing

(c) $\sqrt{(-16)(-4)} = \sqrt{64} = 8$

(d) $\sqrt{-4 \cdot 16} = \sqrt{-64}$: geen oplossing

A.C.O. 5:

(a) $\sqrt{4 \times 36 \times 81} = 2 \times 6 \times 9 = 108$

(b) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$

(c) $\frac{\sqrt{36}}{121} = \frac{6}{121}$

(d) $\sqrt{0.09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = 0.3$

(e) $\sqrt{12^4} = 12^{4:2} = 12^2 = 144$

(f) $\sqrt{144 \times 9 \times 4} = 12 \times 3 \times 2 = 72$

(g) $\sqrt{9^6} = 9^3 = 729$

(h) $\sqrt{1.96} = 1.4$